象數一原

象數一原卷四

錢唐項名達著

錢唐戴　煦校補

零分起度弦矢率論

上論兩等邊三角及遞加數衍至五分而止象數之兩相符合已見一班五分下可以例知不煩再衍矣惟其閒列分求率衍數諸法頗似委曲繁重而覈其條理要自井然今更申論大凡俾得了明於心目五分以下設欲任求者亦可循之推衍云

凡分母必大於分子今母大子小者惟首分爲然餘皆母小而子大蓋分母爲分子所從生先生首分子

而後遞加分母以生諸分子能生者爲分母所生者爲分子固不以大小論母子也

分子母可約者宜約從小分故分母偶分子不得復偶偶則可約分母由兩數相乘而得者此兩數不得爲分子由諸數遞乘而得者此諸數亦不得爲分子爲分子皆可約也

分母一而分子有兩一爲正一爲負兩分子之和卽分母其較卽起度通弦弧分此指正大於負者言若負大於正則爲負度通弦弧分

整分第一形居圜內其形最小半分第一形溢圜外

其形最大零分第一形其底自圜內出圜外最小者必微大於整分最大者必微小於半分

整分第二形祇一無兩其形最大半分第二形有兩而等其形適中零分第二形兩不相等一大於半分一小於半分互為正負而皆較整分為小

求第一二形腰率分母本弧無線可比不得不用借弧蓋一分母含有諸分子借分子小弧之線以為比例也本可不論奇偶概借用一分弧之通弦惟因易率時須寄其分而借半分起度諸率者其率又先有寄分若寄分大取數必繁不便於乘除加減今於奇

分母借一分通弦偶分母別借二分通弦用爲二率則可折半以取分而分較小數乃不至於過繁

一弧任析爲幾分逐分作半徑弧分奇者自界角起作一三五七等分通弦諸線聯成心角界角形其式常與整分起度者相合弧分偶者須分二種一自界角起作四八十二十六等分通弦諸線聯成心角界角形其式不與整分合而與半分合蓋半分以全分通弦爲二率所作各通弦皆偶分今借二分通弦爲二率所作各通弦皆偶分之倍故折半仍偶而其式相當也一自界角起作二六十十四等分通弦諸線

聯成心角界角形其式又不與半分合而與整分合

蓋整分以一分通弦爲二率所作各通弦皆奇分今

借二分通弦爲二率所作各通弦皆奇分之倍故折

半得奇而其式相當也術是則取用率法者宜辨弧

分奇偶凡分母弧及兩分子相減餘弧其分奇應用

整分率分偶而折半得奇者仍用整分率折半仍偶

者始用半分率

此上就分母弧及兩分子相減弧論用率也若分子

之弧則常與界角形相應整分起度之界角形起一

分遞加一分成各形而奇分母之分子亦起一分遞

加一分爲諸分子故用整分率半分起度之界角形起半分遞加全分成各形而偶分母之分子則起一分遞加二分爲諸分子二與一猶之全與半故用半分率

求第一形之比例法以分母弧居中心角形腰奇分取一分爲居中分偶分合兩分爲居中分比兩分子相減弧居中心角形腰若半徑與第一形腰此比例取同式相當以分母弧居中心角形腰比分子弧相應界角形腰分子弧作兩半徑線界之界角形腰兩端抵半徑線上而與之相應若半徑與第二形腰此比例生於轉比詳見前三分四分五分諸圖說卽折至多

分其比例之法常等不復另圖
居中心角之形數以三五七九等奇數遞加弧分奇或偶而折半則奇其分數亦爲三五七九等故分數即形數偶而折半仍偶其分數則爲二四六八等故分數加一得形數分母弧如是兩分子相減弧亦如是求第一形腰準是以取形數
相應界角之形數以二四六八等偶數遞加分母奇其分子爲一二三四等故分子倍之得形數分母偶其分子爲一三五七等故分子加一得形數求第二形腰準是以取形數

求第一二形腰分母奇求得之率無寄分分母偶求得之率有寄分何則母奇者兩子相減亦必奇分子亦逐分遞加與整分界角形相應故乘除法皆用整分率無寄分卽求得之率亦無寄分母偶而折半或奇兩子相減折半則必偶母偶而折半或偶兩子相減折半則必奇常一奇一偶分子亦逐分遞加與半分界角形相應故乘除法兼用半分率有寄分卽求得之率亦有寄分

易率法先定相當率相當率者借弧通弦爲二率其正負若干率適與本弧二率通弦相當也旣有當本

弧二率之借率則遞乘遞除卽可得當本弧逐率之借率借率遂與本率通而其率可用是爲用率夫求第一二形腰所得之率借率也以此當本弧逐率之借率乘除之使與求得率合隨以乘除借率者乘除本弧之逐率自無不與求得率合於是借率可易爲本率而求第一二形腰應用之本率始定矣是爲定率此理固易明恐而衍算則繁尤易紛淆者在乎寄分蓋借弧若干借分適與本弧相當其分卽分母亦卽借二率數以之除相當借率借二率除爲一其下逐率不盡受除故須寄分本二率亦隨之寄分此須

就相當率覈定其等差庶加減乘除不至或紊今分條論之

分母奇母耦而折半則奇者亦同一例借弧用整分通弦率率皆實數其位有盡法視分母為他數自乘而得或再乘而得者則用他數為小分照案母偶而折半則奇者不可用小分以除借四率若他數再乘得者以他數自乘除之者可除得整數仍寄小分於右六率仍其原數若他數再乘得者以他數除之寄小分自乘於右八率轉以小分乘之若他數再乘得者仍其原數寄小分再乘於右下仿此若分母為兩數相乘而得或諸數連乘而得者其小分雜糅用之不便四率仍其原數寄分母於右六

率轉以分母乘之寄分母自乘於右八率更以分母自乘乘之寄分母再乘於右下仿此此皆每降二率寄分增一乘其等已齊求用率時不須通分也若分母非他數自乘或相乘而得者則四率以下末率以上諸率數分母皆可除盡惟末率不可除則寄其分母求用率遞乘時凡實數乘實數者併而置左實數乘寄分者併而置右分母乘左與右相併爲得率寄分母於右實數乘寄分者併而置左實數乘寄分自乘者及寄分乘寄分者併而置右分母乘左與右相併爲得率寄分母自乘於左下仿此此雖須通分而

率數則較少也

煦按　先生絕筆於此以後今補

弧分耦謂折半仍耦者借弧用半分通弦率其四率以下常寄二爲分母而位無盡其用爲分母之二率常得弧分之半法視分母爲二之累乘數則用二爲小分自四率以下按乘數增寄其分但惟分母爲二之自乘數則增寄之後其等自齊若較自乘數增幾乘則當以所增乘數自六率以下逐率增乘之並增寄其分其等方齊如分母爲再乘數則以二乘六率增寄一乘以四乘八率增寄二乘餘可類推若分母非二之累乘數則用借弧

率二之分母與半分之分母兩相雜糅當合兩分母用弧分爲分母法視四率以下半分分母乘數減一以借弧分分母加乘數以乘之分母遂變爲弧分其四率以下復以弧分自乘乘之以齊其等（半分通弦率自六率以下分母均遞增四乘惟四率僅弦寄自乘較少二乘今雖變用弧分爲分母而寄分乘數與原率同故以分母自乘通乘之其等乃齊）

弧分不論奇耦其乘法借三率均用整分倍矢率率皆實數其位亦有盡而即爲借弧通弦自乘一率除之之數其寄分須視通弦以爲準弧分奇而通弦分母用小分者視小分爲分母自乘數則借

三率之三率必爲小分三乘數三率旣除爲一復以小分再乘除其五率仍寄小分於右以小分自乘除其七率仍寄小分自乘於右以小分除其九率仍寄小分再乘於右十一率仍其原數寄小分三乘於右十三率轉以小分乘之寄小分四乘於右下仿此若小分爲分母再乘數則借三率之三率必爲分母五乘數亦如上逐率減一乘除之寄分則逐率增一乘餘可類推若通弦分母用借二率數者則借三率之三率爲分母自乘三率旣除爲一復以分母除其五率仍寄分母於右七率仍

其原數寄分母自乘於右九率轉以分母乘之寄母再乘於右下倣此以上所用乘法其等已齊求用率時不須通分若通弦分母逐率皆可除盡惟末率寄分母者則借三率之末率以上平分爲二其上半各率分母自乘皆可除盡下半各率分母皆可除盡但寄分母於右惟末率寄分母自乘於右求用率時當通分也求用率時通分法已見前

弧分耦其通弦分母用二爲小分者視通弦二率爲小分自乘則借三率之三率必爲小分三乘數三率既除爲一五率仍其原數寄小分三乘於右

七率轉以小分三乘乘之寄小分七乘於右以下
每率增四乘乘之小分亦增寄四乘如借二率爲
小分再乘數則借三率之三率必爲小分五乘數
三率旣除爲一以小分除其五率寄小分四乘於
右七率轉以小分三乘乘之寄小分九乘於右以
下每率增五乘乘之小分亦增寄五乘餘可類推
通弦分母變用弧分者則借三率之三率爲半弧
分自乘數三率旣除爲一自五率以下先以四通
乘之然後以弧分自乘乘其五率寄分母三乘於
右以弧分五乘乘其七率寄分母七乘於右以下

每率增四乘乘之分母亦增四乘凡此其等已齊求用率時亦不須通分也

凡相當之本二率及乘法之本三率視弧分奇而通弦二率同弧分者本二率亦用弧分爲分母而率數常爲一本三率用弧分自乘爲分母而率數亦爲一弧分耦則通弦之二率常爲半分弧倍矢之三率常爲半弧分自乘其本二率當以二乘之寄弧分爲分母本三率以四乘之寄弧分自乘爲分母故本二率數常爲二而三率數常爲四若弧分奇而通弦分母用小分視用爲分母之二率係

小分幾乘即爲本二率分母弧分耦而通弦用二爲小分爲小分者視弧分爲小分幾乘減一乘爲本二率分母均以本二率乘數倍之加一爲本三率分母而率數亦皆爲一

用率者以借弧各率求相當之本弧各率爲易率之用也前求相當率及乘法僅有借弧二三率與本弧二三率相當之數而奇率不止三如五七九等率皆奇率也易第一形腰率用之耦率不止二如四六八等率皆耦率也易第二形腰率用之求奇率者以相當之本三率借三率兩兩對列然後

以借三率乘借三率一率除之得借五率卽以本三率乘本三率一率除之得本五率與之相當以借三率乘借五率一率除之得借七率卽以本三率乘本五率一率除之得本七率與之相當以借三率乘借七率一率除之得借九率卽以本三率乘本七率一率除之得本九率與之相當如是遞乘遞除得各奇率均兩兩對列求耦率者以相當之借二率本二率兩兩對列然後以借三率乘借二率一率除之得借四率卽以本三率乘本二率一率除之得本四率與之相當以借三率乘借四

率一率除之得借六率卽以本三率乘本四率一
率除之得本六率與之相當如是遞乘遞除得各
耦率亦兩兩對列是爲用率
凡借率乘法法首位乘實首位常爲單一仍置首
位法首位乘實三位法三位乘實首位兩數相併
置次位法首位乘實五位法三位乘實三位法五
位乘實首位併三數置三位如是遞乘遞併分置
各位其分母則兩數相乘一不寄分一寄分者仍
寄原分兩數均有寄分者則以兩寄分乘數相併
加一爲寄分乘數寄分母者爲無乘數寄分自乘者爲一乘如分母之

等已齊者則同位自然同母若其等未齊須通分相併其法以分母乘數最多爲準其無寄分者以最多乘數乘之其有寄分而較最多乘數差幾乘者則以所差乘數增乘之然後相併仍寄最多乘數爲母

凡率數相乘三率乘三率卽一率乘五率（在面積爲三率）三率乘五率卽一率乘七率（在面積爲四率）三率乘七率五率乘五率卽一率乘九率（在面積爲五率）三率乘九率五率乘七率卽一率乘十一率（在面積爲六率）乘得數後前如按位遞併分置各位其一率乘五率者命爲

五率一率乘七率者命爲七率一率乘九率者命爲九率卽一率除得數耦率乘法凡三率乘二率卽一率乘四率面積在二三率之間不可以率數名三率乘四率五率乘二率卽一率乘六率面積在三四率之間三率乘六率五率乘四率七率乘二率卽一率乘八率面積在四五率之間乘得數後亦按位遞併分置各位其一率乘幾率者命爲幾率亦卽一率除得數凡乘得數皆位位相連一率除後則每率間一空位

凡分母耦而折半則奇者其分母僅得弧分之半求得各用率之借率後當變用弧分爲分母何也

蓋耦而折半則奇其通弦倍矢率雖可借整分而求第一二形腰率必參用半分腰率其求得率必仍用二爲分母夫求得率用二爲分母而用率用半弧分爲分母則分母雜糅不便乘除故須變用弧分爲分母也其法視借率寄分母者以二乘之寄分自乘者以二自乘乘之寄分再乘者以二再乘乘之餘倣此分母遂變爲弧分而寄分乘數仍照原寄分

凡用率之借率首位必令爲單一而無寄分其本率不必盡爲一故惟分母奇或分母耦而用小分

者其本率數均爲一若分母耦而不用小分則其本二率數常爲二三率數常爲四故遞求四六八各耦率常得八與三十二與一百二十八等數遞求五七九各奇率常得十六與六十四與二百五十六等數

求用率之本率寄分以本三率寄分乘數加一爲寄分乘差置本二率寄分乘數以寄分乘差遞加之得各耦率寄分乘數置本三率寄分乘數以寄分乘差遞加之得各奇率寄分乘數

定率者易借率爲本率也前求第一二形腰率皆

借弧通弦爲二率而非本弧通弦爲二率今借弧各率均有相當之本弧各率則可變借率爲本率而率於是乎定所謂定率也其法求各奇率除一率爲本弧借弧通用無庸變易外視求得率之三率若干以乘用三率之本率借率以乘得之借三率減求得率之三率却盡卽與乘得之本三率上下對列爲定三率復以借三率之五率減求得率之五率以其減餘乘用五率之本率借率乃以乘得之借五率減五率減餘卻盡卽與乘得之本五率上下對列爲定五率復以借三率之七率與借

五率之七率相併減求得率之七率以其減餘乘用七率之本率借率乃以乘得之借七率減七率減餘卻盡卽與乘得之本七率上下對列爲定七率如是遞乘遞併遞減至求得各率減盡而止而速定率之諸本率卽所求腰率也求耦率其法並同

弧分奇求得率無寄分與借率相減時須通分視借率分母或用小分或用弧分而其等已齊者其借率同位自然同母相併不必通分惟須以借率分母通求得率然後相減若借率分母之等不齊

者須視寄分乘數最多爲準其較最多乘數差幾
乘者如乘數增乘之然後相併復以最多乘數通
求得率然後相減
弧分耦求得率寄二爲分母視借率用二爲小分
者則分母相同須照小分每率增寄若干乘以增
乘求得率則減併時無須通分若借率分母不用
小分而變用弧分爲分母者則求得率亦須變用
弧分爲分母法視求得率寄分母者以半弧分乘
之寄分自乘者以半弧分自乘乘之餘倣此仍照
原寄乘數分母遂變用弧分其借率減併時亦不

須通分也

借率與求得率互有正負須認明借率與借率係相併借率與求得率係相減而求得率爲本數其正負加減術凡相併同名則相併異名則相減而名從多數凡相減異名則相併而名從本數同名則相減本數多名從本數本數少名異本數

凡以求得率或求得率減餘乘用率之本率其有寄分者即於本率分母增寄其分益求得率與本率其所寄分母固已齊同也

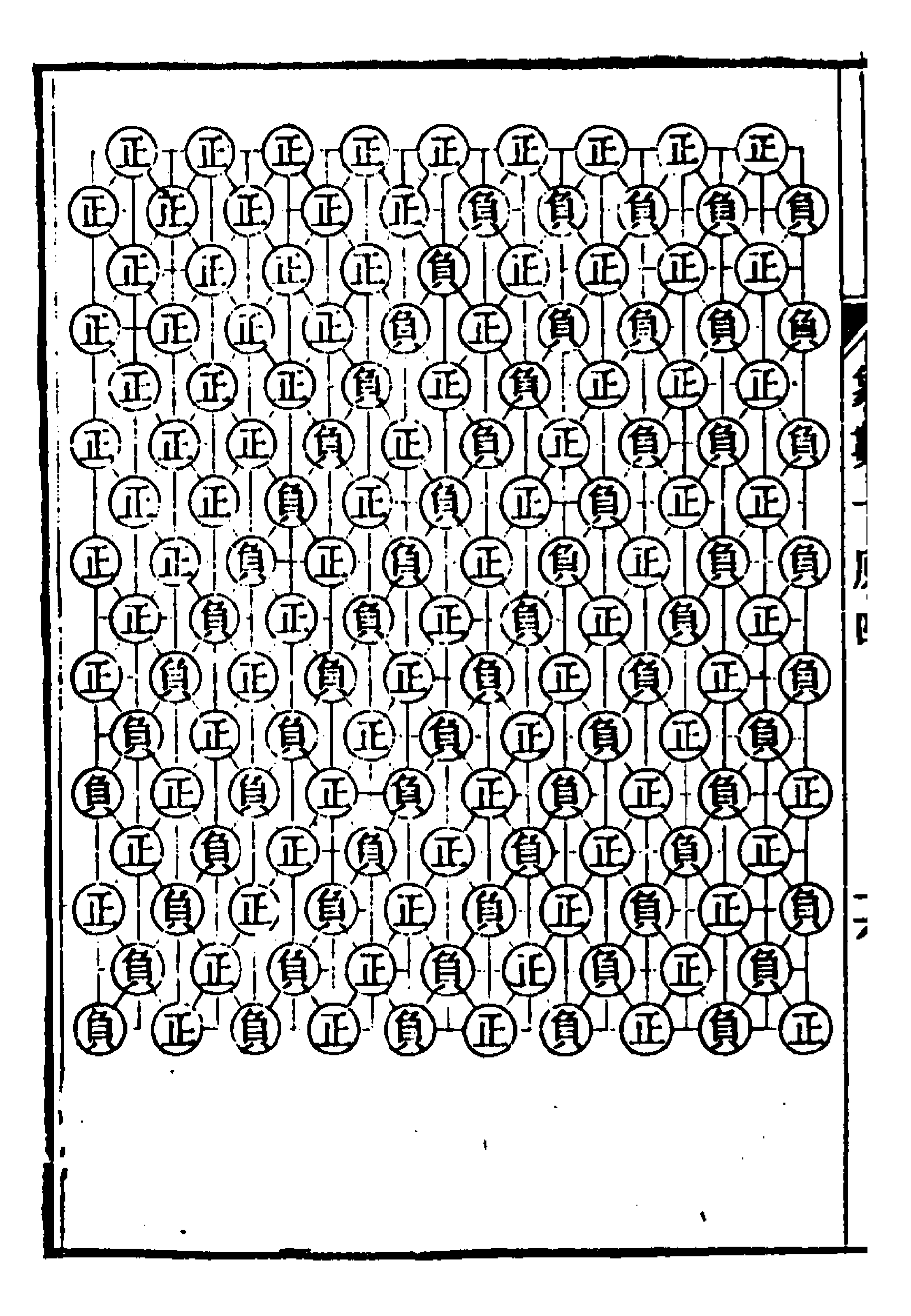
凡衍遞加數以本位向上斜左線所聯根層之左

一位乘本位本層遞加數除之本層遞加數加平積用二除立積用三除三乘積用四除之類是也得左下一位積以向上斜右線所聯根層之右一位乘本位本層遞加數除之得右下一位積此通法也而零分遞加數逐層皆有寄分須兼用通分法其根層恆寄分母故以斜左線所聯根層之左位乘本位遞加數除之又以分母除之而始得左下位積以斜右線所聯根層之右位乘本位遞加數除之又以分母除之而始得右下位積又以左上一位根積加本位得左位積以右上一位減本位得右位積亦通法也而在零分

則逐層分母不同亦須通分故視本層較上層增寄幾乘則以幾乘通左上位加本位得左位積以幾乘通右上位減本位得右位積其求法或一以左線所聯之左位乘本位一以右線所聯之右位乘本位而先得奇耦二行直下積或檢以左線所聯之左位乘本位而先得各首積然後順加逆減以求各層積均無不可

凡求逐位積皆須用分母除故每層寄分必增一乘此寄分之有定者而每層遞加數之除法如與分母相涉則亦不受除何謂相涉但凡除法與

分母同則不受除或分母爲他數之累乘數則他
數及他數之累乘數必均不受除又分母爲兩數
相乘或諸數疊乘數則此諸數及諸數之累乘數
亦均不受除故凡除法遇此諸數皆須增寄
遞分用分母除之寄分參以遞加數不受除之寄
分則其等不齊欲齊其等當分別奇耦視奇層至
奇層增寄幾乘者皆令增寄幾乘耦層至耦層增
寄幾乘者亦皆令增寄幾乘而相連之一奇層一
耦層與相連之一耦層一奇層其等不必齊
零分遞加數以有反減亦如半分之有正負而正


正 正 正 正 正 正 正 正 正
正 正 正 正 正 負 負 負 負 負
正 正 正 正 負 正 正 正 正
正 正 正 正 負 正 負 負 負 負
正 正 正 負 正 負 正 正 正
正 正 正 負 正 負 正 負 負 負
正 正 負 正 負 正 負 正 正
正 正 負 正 負 正 負 正 負 負
正 負 正 負 正 負 正 負 正
正 負 正 負 正 負 正 負 正 負
負 正 負 正 負 正 負 正 負
負 正 負 正 負 正 負 正 負 正
正 負 正 負 正 負 正 負 正
正 負 正 負 正 負 正 負 正 負
負 正 負 正 負 正 負 正 負
負 正 負 正 負 正 負 正 負 正

負有一定之位亦與半分同其自首正根向下斜左線所聯各首正積以上之左角則根積皆正自首負根向下斜右線所聯各首負積以上之右角則奇層正偶層負其各首正積向下斜右線所聯各積則恆一負一正相閒其各首負積向下斜左線所聯各積則首積負者俱負正者俱正其自各首積直下線所聯各積則首積正者恆一負一正相閒首積負者恆一正一負相閒觀下圖自悉

零分遞加數奇行亦即心角形腰率其正負之不同與整分異而與半分無異蓋在遞加數則第一

行首位第二行次位第三行三位按行以次遞降其上皆正其下皆負正相間在各形腰率則第一形一率第二形二率第三形三率按形以次遞降其上皆正負相間其下正則皆正負則皆負是正負之不同無異於半分也然深究其不同之故不特無異於半分亦仍無異於整分何也整分遞加數逐層逐位皆正而整分腰率恆一正一負相間兩相比較上位正負同者下位必異上者正負異者下位必同常一異一同相次而列今零分遞加數各首積以上皆正者在腰率則正負相間遞加

數各首積以下正負相間者在腰率正則俱正負則俱負兩相比較亦屬一異一同相次而列是其正負雖與整分異而正負不同之致仍與整分無異也

腰較者以心角形腰減一率半徑也半徑爲本數而各形腰爲減數凡減法無對者易其正負故心角形腰與腰較其正負恆相反然自第三形腰以下小於半徑故以腰率減半徑當易其正負如半分及零分之第一形腰大於半徑是宜以半徑減腰率而三率以下仍其正負矣但雖仍其正負而

求倍矢率時用減不用加異於求諸倍矢率者仍是以腰率減半徑而所餘爲負算故以減爲加與第三形以下一例也

遞加數去根差其兩奇行并積卽倍矢率其并平積與三率同數其并三乘積與五率同數此下五七九等乘并積莫不與七九十一等率同數其兩耦行并積卽通弦率其并根與二率同數并立積與四率同數此下四六八等乘并積莫不與六八十等率同數然數雖同而正負不同其不同之致前既詳言之矣欲變遞加數而爲弦矢率大率不

論奇耦行首位仍其正負次位易其正負三五七九等位與首位同二四六八等位與次位同此一定之法整分如是半分及零分亦莫不如是

弧分奇則奇耦皆可爲分子但惟矢率分子得奇耦之全而弦率僅有奇分子而無耦分子必待折弧分爲分母之倍而後補其不足弧分耦則分子有奇而無耦但矢率得奇分子而弦率僅有耦分子而無奇分子夫弦率母子俱耦則皆可折自可合分母爲弧分之半其耦而折半則奇者分母折而奇分子必折而仍耦適以補奇分弧弦率之耦

分子其耦而折半仍耦者分母折而耦分子必折而爲奇是卽耦分弧弦率之奇分子故耦分弧常於弧分之倍而得其弦率所以然者弦率爲通弧之弦而矢率爲弧背之正矢而非通弧之矢也若概以通弧弦矢論則整分起度所得爲一分通弧弦二分通弧倍矢三分通弧弦四分通弧倍矢弦常得奇分而矢常得耦分半分起度所得爲一分通弧倍矢二分通弧弦三分通弧倍矢四分通弧弦矢常得奇分而弦常得耦分是合整半分兩相對待也卽零分亦以奇分弧與耦而折半則奇者

兩相對待而弦矢率分子以全惟耦分弧則以耦而折半仍耦弧分起度弦矢率母子各折半而得其分子之全此以通弦論弦矢率則然若概以正弦正矢論則整分起度爲二分弧之一倍正弦一分弧倍正矢二分弧之三倍正弦二分弧倍正矢矢率得整分之全兩弦率轉得半分之全半分起度爲二分弧之一倍正矢一分弧倍正弦二分弧之三倍正矢二分弧倍正弦矢率得半分之全而弦率轉得整分之全是整半分兩相交互也卽零分亦以奇分弧與耦而折半則奇者兩相交互而

弦矢率分子以全惟耦而折半仍耦者則不待交互而自得弦矢率分子之全此以正弦正矢論弦矢率則然若今所云弦率乃通弧之通弦而矢率乃弧背之正矢故其子母全半之不同有如此

求自根斜左一行積

分子遞加分母爲諸根分子置根分子以分母除之爲根數根分子加分母以乘根分母除之二除之爲平積根分子加倍分母以乘平積分母除之三除之爲立積根分子加三分母以乘立積分母除之四除之爲三乘積根分子加四分母以乘三

乘積分母除之五除之得四乘積如是遞求得各乘積皆正若用負根則以分子遞減分母爲諸負根分子其遞次乘法亦用根分子遞減分母減數大根分子小減得正乘法減數小根分子大減得負乘法視乘法正負與根積同名者得積爲正異名者得積爲負

求自根斜右一行積

分子遞加分母爲諸根分子置根分子以分母除之爲根數根分子減分母以乘根分母除之二除之爲平積根分子減倍分母以乘平積分母除之三除之爲立積根分子減三分母以乘立積分母除之四除之爲三乘積根分子減四分母以乘三

乘積分母除之五除之爲四乘積如是遞求得各乘積凡乘法減數小根分子大減得正乘法減數大根分子小減得負乘法視乘法正負與所乘根積同名者得積爲正異名得積爲負若用負根則遞次乘法用根分子遞加分母而皆爲負乘法定積正負法與上同

零分諸術大率與半分同半分用倍根者卽以二爲分母之根分子也故在零分爲根分子其加減二四六等數者乃分母二乘一二三之數也故在零分爲加減一分母及二分母三分母其求積通加二除者二卽半分分母也故在零

分則通加分母除

求耦行直下積（即界角形腰率）

置本行根分子（在界角形爲形數折半乘分母內減分母子相減數）分母除之爲根數（即二率）根分子一加分母一減分母相乘（分子自乘減分母自乘其數亦同）以乘根分母自乘除之二三遞除之爲立積（即四率）根分子一加倍分母一減倍分母相乘（分子自乘減分母自乘之四倍其數亦同）以乘立積分母自乘除之四五遞除之爲四乘積（即六率）根分子一加三分母一減三分母相乘（分子自乘減分母自乘之九倍其數亦同）以乘四乘積分母自乘除之六七遞除之爲六乘積（即八

率如是遞求得各乘積凡乘法根分子大加減數小則兩數同名乘得正乘法根分子小加減數大則兩數異名乘得負乘法若求腰率則正負互易與半分同視乘法正負與所乘根積同名者得積爲正異名者得積爲負

求奇行直下積即心角形腰較率

併左右兩耦行根分子爲本行倍根分子在心角形爲形數乘分母內減分母子相減之倍數倍根分子一加分母一減分母相乘倍分子自乘減分母自乘其數亦同分母自乘除之四除之二除之爲平積即三率倍根分子一加三分母一減三

分母相乘倍分子自乘減分母自乘之九倍其數亦同以乘平積分母自乘除之四除之三四遞除之爲三乘積率即五倍根分子一加五分母一減五分母相乘倍分子自乘減分母自乘之二十五倍其數亦同以乘三乘積分母自乘除之四除之五六遞除之爲五乘積率即七倍根分子一加七分母一減七分母相乘倍分子自乘減分母自乘之四十九倍其數亦同以乘五乘積分母自乘除之四除之七八遞除之爲七乘積率即九加是遞求得各乘積凡定乘法正負及各積正負與耦行同若求腰較率則乘法正負互易亦與前同

求耦行積半分用倍根及加減二四四六等數並

通加四除零分用根分子及加減一分母二分

母三分母並通加分母自乘除與求斜行積同

義求奇行積半分用倍根加減一三五等數者

乃是以根分子加減半分母一半分母二半分

母之數也但半分之分母可半而零分分母或

可半或不可半故用倍數其以倍根分子加減

一分母三分母五分母者用倍數也既用倍數

則相乘後必爲四倍數故較半分者加一四除

至半分者亦有四除乃分母二自乘數即如零

分分母自乘之除也

求兩耦行併積即通弦率

併兩耦行根分子爲倍根分子即弦分分子分母除之爲倍根即爲併根即二率倍根分子一加分母一減分母相乘即弧分分子自乘減分母自乘以乘併根分母自乘除之四除之二三遞除之爲併立積即四率倍根分子一加三分母一減三分母相乘即弧分分子自乘減分母自乘之九倍以乘併立積分母自乘除之四除之四五遞除之爲併四乘積即六率倍根分子一加五分母一減五分母相乘即弧分分子自乘減分母自乘之二十五倍以乘併四乘積四除之五六遞除之爲併六乘積即八率如是遞

求得各乘併積凡乘法倍根分子大加減數小則兩數同名乘得正乘法倍根分子小加減數大則兩數異名乘得負乘法（若求通弦則乘法正負與併積相反視乘法）正負與所乘根積同名者得積為正異名者得積為負

求兩奇行併積（即倍矢率）

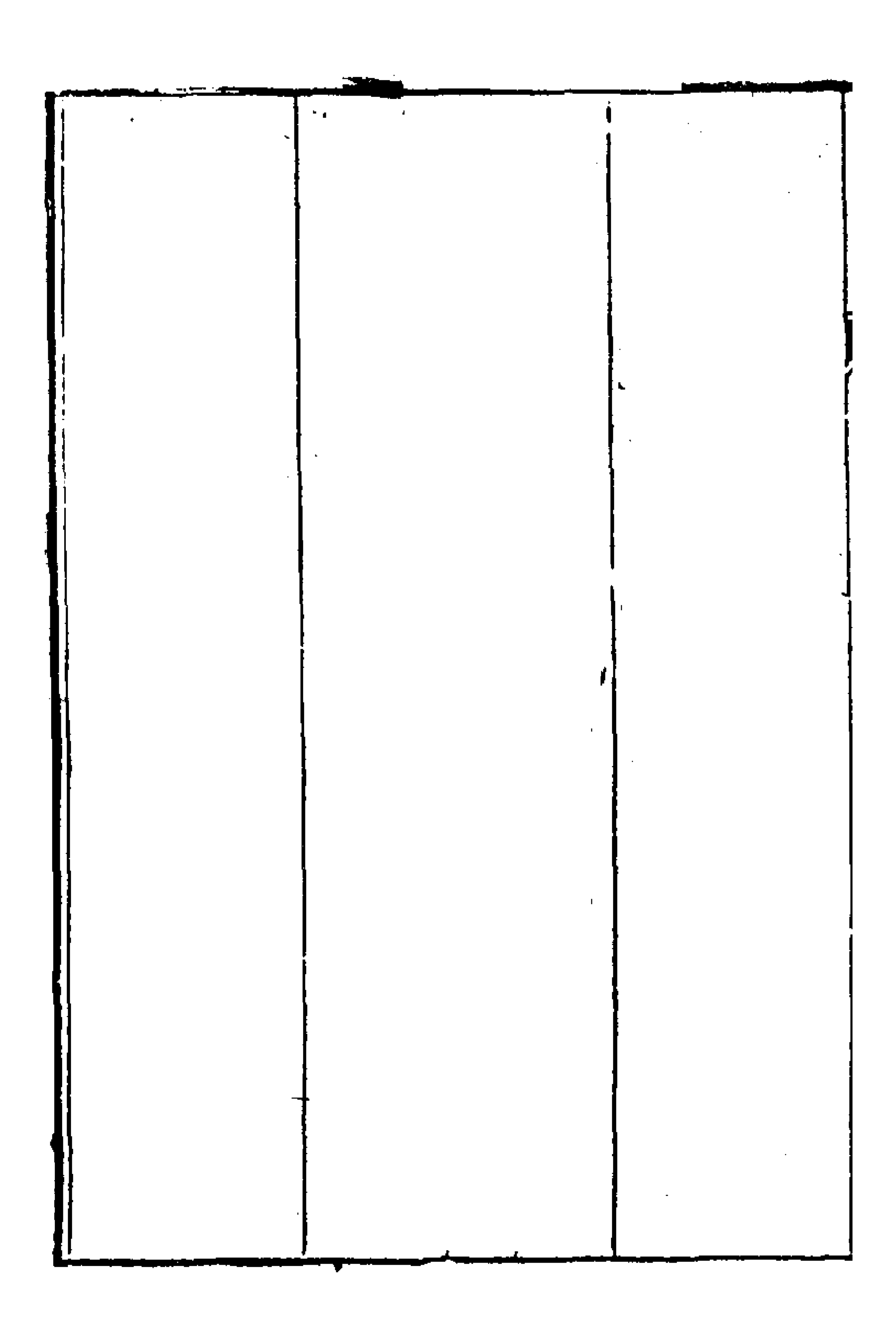
兩奇行間耦行根分子為根分子即半併根分子（即弧分分子）自乘之分母自乘除之為併平積（即三率）根分子一加分母一減分母相乘（即弧分分子自乘減分母自乘）以乘併平積分母自乘除之三四遞除之為併三乘

積即五率根分子一加倍分母一減倍分母相乘即弧分分子自乘減分母自乘之四倍以乘併三乘積分母自乘除之五六遞除之爲併五乘積即七率根分子一加三分母一減三分母相乘即弧分分子自乘減分母自乘之九倍以乘併五乘積分母自乘除之七八遞除之爲併七乘積即九率如是遞求得各併積凡乘法正負及各積正負與併耦行同若求倍矢則乘法負亦與併積相反求耦行併積與求奇行直下積同求奇行併積與求耦行直下積同惟二三四等遞加數之除法則遞差一位故所得積亦遞差一乘半分如

是零分亦如是至遞加數乘法正負與弦矢率乘法正負所以不同之故緣求遞加數係以若干分母加減分子而分子爲本數故其相加恆爲正而相減則分子數大爲正分母數大爲負求弦矢率係以分子加減若干分母而分母爲本數故其相加亦爲正而相減則分子數大爲負分母數大爲正由是兩數相乘在遞加數爲同名相乘之正乘法在弦矢率必爲異名相乘之負乘法在遞加數爲異名相乘之負乘法在弦矢率必爲同名相乘之正乘法乘法之正負

相反故乘得數之正負常一異一同相次而列也

仁和高雲麟
新陽趙元益同校



象數一原卷五

錢唐項名達著

錢唐戴

諸術通詮

上四卷發明整分半分零分起度弦矢率而會歸於遞加數末雖斟定各數算術係爲術推原非就術詮解也且弦矢率與遞加數相應者乃其用數而諸率自有其本數求弦矢須遞增本數之乘除而術始備新立此弧弦矢求他弧弦矢二術其義藴賓包攬無遺一切術皆自此而生而各據其一得今按術詮解二術顯一切術自明故半徑求弦矢二術及董氏杜

氏諸術雖彼此互異幾莫知意指之所存及以二術通之則違者順奧者彰無不宛轉相從而約歸一致河濟江淮皆水也瓶盤釵釧皆金也蓋象與數既得其通而術之各據一得者亦有通詮無異詮矣

新立求弦矢四術

知本度通弦求他度通弦

法以所知度爲分母所求度爲分子分子母可約者約之從簡

論曰所知度即本度所求度即他度他度由本度而生故本度爲分母他度爲分子通弦度在等邊三角形本度即心角界角度亦即逐次遞加度他

度卽界角相連兩形腰所當和度或較度在遞加數本度卽遞加之分母他度卽兩根分子和數或較數故通弦分母常與兩等邊三角及遞加數之分母等而分子則爲其兩分子之和與較度約度從簡者但知他度爲本度幾分之幾便可入算不必定以度數爲分子母其不能約者分子母悉從度數也

分母自乘與分子自乘相減爲第一乘法分母自乘九乘之與分子自乘相減爲第二乘法分母自乘二十五乘之與分子自乘相減爲第三乘法分母自乘

四十九乘之與分子自乘相減爲第四乘法凡分母自乘內減分子自乘者爲正乘法分子自乘內減分母自乘者爲負乘法相減適盡者下更無數不須求故亦無乘法

論曰此定通弦乘法也通弦乘法卽遞加數中根層各兩數相乘四倍之數蓋根層兩數或並位或隔二位隔四位其和較數常與分子及一分母三分母五分母等故子母各自乘相減適得兩數相乘之四倍遞加數用以求偶層併積併積旣卽弦率今亦用以求通弦又分子不動分母以三五七

等遞次加大自乘後增爲九倍二十五倍四十九倍故分母自乘必逐次增乘也凡本度大於他度者他度爲正負兩根相減數（本宜併因正負異名故以減爲併）則分子爲較分母爲和分母愈加而大不能小於分子其和較不易本度小於他度者他度爲兩正根相併數則分子爲和分母爲較分母漸加而大至大於分子而和較互易總之母和子較者求併積之兩數常一正一負以其異名乘法爲負而求率則易爲正乘法母較子和者求併積之兩數皆正以其同名乘法爲正而求率則易爲負乘法與遞

加法適相反也相減適盡者其分母爲一分分子爲三五七等奇分諸率與整數遞加相應乘法常負分母自三五七等遞加至與分子等減必適盡若分子爲偶分不能減盡也

迺置本度通弦以分子乘之分母除之爲第一數

論曰此求二率實數也實數中兼有兩種數一爲本數一爲用數其與遞加併積等者乃其用數若本數則半徑爲一率通弦爲二率倍矢爲三率用連比例遞求之諸率本數根於本度弦矢用數以求他度弦矢必先定本數後入用數始得他度弦

矢率今置本度通弦者定二率本數也分子乘分母除者於二率本數中融入用數也本數用數全是爲二率實數

次以半徑爲連比例第一率分母除通弦爲第二率二率自乘一率除之得第三率

論曰此定諸率本數之乘除法也求率法每求一數遞降兩率故必以三率爲乘法一率爲除法通弦旣卽二率本數便宜自乘之一率除之以求三率今不逕用通弦而以分母除通弦是二率爲分母除過之數求得三率必爲分母自乘除過之數

所以然者因每次求率除法中應有一分母自乘三率既爲除過數以乘前率而求後率便可省去分母自乘除也

置第一數以三率乘之一率除之得第四率第一乘法乘之四除之又二除之三除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第六率第二乘法乘之四除之又四除之五除之爲第三數次置第三數三率乘之一率除之得第八率第三乘法乘之四除之又六除之七除之爲第四數依是遞次乘除得各數漸小至單位止

論曰此求諸率實數也每次置前一數以三率乘之一率除之是已於前率實數中易其本數爲後率本數而其用數尙屬前率復依遞加數乘法乘之除法除之始易前率用數爲後率用數而得後率實數術列至第四數止如須再求其三率一率乘除及四除每次盡同惟遞加數乘除法漸增而多約言之乘法中乘分母自乘者挨次以各奇數自乘除法挨次以一偶數一奇數遞除也單位視半徑爲升降半徑一千萬單位居第八位半徑增多則單位愈降

第一數常爲正第二數下爲正乘法所得者前一數正者正之負者負之爲負乘法所得者前一數正者負之負者正之但有正數併正數卽所求通弦兼有負數併正數與併負數相減卽所求通弦

論曰弦矢率之正負與遞加併積有同有異究其故由乘法而别故宜以乘法之正負定諸率之正負乘法正以乘正數爲同名得數爲正以乘負數爲異名得數爲負故前數正者正之負者負之乘法負以乘正數爲異名得數爲負以乘負數爲同名得數爲正故前數正者負之負者並之

知本度矢求他度矢

法以所知度爲分母所求度爲分子

論曰此求正矢也凡弧矢術所用爲通弦正矢故不求倍矢而以正矢相求正矢度卽倍矢度非若正弦度得通弦度之半度旣同求法亦同但就倍矢以明乘除正矢自悉惟數宜折半耳矢之本度卽兩等邊形角度亦卽遞加數分母與通弦同而求他度則爲界角形腰所當度及遞加數諸根分子故度分子母常與遞加數分子母等也

分母自乘與分子自乘相減爲第一乘法分母自乘

四乘之與分子自乘相減爲第二乘法分母自乘九乘之與分子自乘相減爲第三乘法分母自乘十六乘之與分子自乘相減爲第四乘法凡分母自乘內減分子自乘者爲正乘法分子自乘內減分母自乘者爲負乘法相減適盡者下更無數不須求故亦無乘法

論曰此定倍矢乘法也用分子母各自乘相減及定乘法正負皆與通弦同法惟分子母不爲根層兩數之和較而爲其半和半較蓋其根層遞取之兩數常隔一三五七等奇位故必加減折半始與

分子及一分母二分母三分母等分母旣以二三四五遞加自乘後亦必以四九十六二十五遞乘也

置本度矢以分子自乘乘之分母自乘除之爲第一數

論曰本度矢正矢也爲三率本數之半三率用數爲分子自乘寄分母自乘以之乘除本數入用數而得三率實數之半

次以半徑爲連比例第一率分母自乘除矢又二乘之爲第三率

論曰三率爲本數乘法乃倍矢也正矢得其半必二乘之方可爲遞次乘法分母自乘除矢者亦以省後遞次之除也

置第一數以三率乘之一率除之得第五率第一乘法乘之三除之四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第七率第二乘法乘之五除之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第九率第三乘法乘之七除之八除之爲第四數依是遞次乘除得各數漸小至單位止

論曰遞次先得本數次入用數俱等通弦惟三率

既爲實數之半遞次乘除所得亦爲諸率實數之半又分子母既爲根層兩數之半和半較則乘法不加四倍除法亦省四除乘法中乘分母自乘皆挨次以奇偶數自乘除法起於三除亦挨次以一奇數一偶數遞除也

第一數常爲正第二數下爲正乘法所得者前一數正者正之負者負之爲負乘法所得者前一數正者負之負者正之但有正數併正數卽所求矢兼有負數併正數與併負數相減卽所求矢

論曰以乘法正負定各數正負俱等通弦惟遞次

所得旣爲各實數之半正負併減後所得者必爲

他度倍矢之半而得他度正矢也

總論曰圜中諸線其率互通理數精微實難思議

酌定此二術凡勾股割圜六宗三要二簡法與夫

杜氏九術董氏四術均於此得其會通焉術中本

數之乘除根於連比例諸率用數之乘除根於零

整分遞加所以能比例者以同式兩等邊三角相

連次列也所以與遞加數合者以弧分遞加諸率

亦隨之遞加也不拘倍分析分任立一分子母

而卽有三角以著其形有遞加以範其數奇偶錯

立和較互呈以及正負加減之所由然無不曲會冥符弦與矢遂條然而各就其緒理數之妙固如是哉此二術乃其本術下二術特本此變通之以備製表之用耳

以半徑求逐度正弦

法以三十度為分母所求度為分子所求度有零分者以一千八百分為分分母化所求度為分納入零分為分子所求度有零秒者以十萬零八千秒為分母化所求度分為秒納入零秒秒為分子分子分母可約者約之從簡分母自乘與分子自乘相減為第一乘法分母自乘九乘之與分子自乘相減為第二乘法分母自乘二十五乘之與分子自乘相減

爲第三乘法分母自乘四十九乘之與分子自乘相減爲第四乘法凡分母自乘內減分子自乘者爲正乘法分子自乘內減分母自乘者爲負乘法相減適盡者下更無數不須求故亦無乘法乃置半徑以分子乘之分母除之二除之爲第一數次置第一數以第一乘法乘之分母自乘除之四除之二除之三除之爲第二數次置第二數以第二乘法乘之分母自乘除之四除之四除之五除之爲第三數次置第三數以第三乘法乘之分母自乘除之四除之六除之七除之爲第四數第一數爲正第二數下爲正乘法

所得者前一數正者正之負者負之爲負乘法所得者前一數正者負之負者正之但有正數併正數卽所求正弦兼有負數併正數與併負數相減卽所求正弦

以半徑求逐度正矢

法以六十度爲分母所求度爲分子所求度有零分者以三千六百分爲分母化所求度爲分納入零分爲分子所求度有零秒者以二十一萬六千秒爲分母化所求度分爲秒納入零秒爲分子分子母可約者約之從簡分母自乘與分子自乘相減爲第一乘法分母自乘四乘之與分子自乘相減爲第二乘法分母自乘九乘之與分子自乘相減爲

第三乘法分母自乘十六乘之與分子自乘相減爲第四乘法凡分母自乘內減分子自乘者爲正乘法分子自乘內減分母自乘者爲負乘法相減適盡者下更無數不須求故亦無乘法乃置半徑以分子自乘乘之分母自乘除之二除之爲第一數次置第一數以第一乘法乘之分母自乘除之三除之四除之爲第二數次置第二數以第二乘法乘之分母自乘除之五除之六除之爲第三數次置第三數以第三乘法乘之分母自乘除之七除之八除之爲第四數第一數常爲正第二數下爲正乘法所得者前一數

正者正之負者負之爲負乘法所得者前一數正者負之負者正之但有正數併正數即所求正矢兼有負數併正數與併負數相減即所求正矢

論曰弦矢術每求一數有兩種乘除其除法常不易乘法則隨本度他度而定依本度得三率而定本數乘法以本度校他度得分子母而定用數乘法二者固不能省也顧念六十度通弦正矢即半徑若用爲本度則一率半徑與二率通弦三率倍矢皆等可以省本數乘除但校定分子母依遞加數乘除之祇一半徑而一象限逐度分杪之弦矢

無不得矣圜中諸線之交通固由於通弦倍矢而正弦矢實爲八線之宗其用最廣因立術求之術中乘除加減與前二術大略相同所異者正弦術半其本度爲分母第一數中弦矢皆增二除求各數省去本數乘除外各增分母自乘之除耳半本度爲分母者正矢倍矢同在一度而正弦度則得通弦度之半今定六十爲本度欲求他度必須求倍他度通弦折半而後得不倍他度而半本度分子母比例亦同故求正矢卽以六十度爲分母求正弦則以三十度爲分母也增二除者半徑乃本

度通弦倍矢求諸數減併後折半方得他度正弦矢今第一數先以二除一數半則諸數皆半後不煩折也增分母自乘除者遞加數本法每降一率必分母除之降兩率必分母自乘除之前二術無此除者因所用三率業經除過今既不用三率則不能省此除也

論董氏四術

有通弦求加幾倍弧分之通弦凡弦之倍分皆取奇分下同

置弧分自乘減一爲第一乘數復置弧分自乘減九爲第二乘數復置弧分自乘減二十五爲第三乘數

依次列之迺置弧分乘通弦爲第一數寄左次以半徑爲連比例第一率通弦爲第二率二率自乘一率除之得第三率以第一數乘之一率除之得第四率第一乘數乘之四除之又二除之三除之爲第二數寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第六率第二乘數乘之四除之又四除之五除之爲第三數寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第八率第三乘數乘之四除之又六除之七除之爲第四數寄右第一數與第三數相併第二數與第四數相併左右相減即所求通弦單位以下棄之未至單位者

依次求之雖未至單位如減數適足弧分自乘數而無乘數者即以前所得數併減之不復遞求如三倍弧則無第三數五倍弧則無第五數

有矢求加幾倍弧分之矢凡矢之倍分奇耦通用

置弧分自乘四倍之減四為第一乘數復置四倍自乘數減十六為第二乘數復置四倍自乘數減三十六為第三乘數依次列之乃置弧分自乘乘矢為第一數寄左次以半徑為連比例第一率二乘矢為第三率以第一數乘之一率除之得第五率第一乘數乘之四除之又三除之四除之為第二數寄右次置

第二數以三率乘之一率除之得第七率第二乘數乘之四除之又五除之六除之爲第三數寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第九率第三乘數乘之四除之又七除之八除之爲第四數寄右第一數與第三數相併第二數與第四數相併左右相減卽所求矢單位以下棄之未至單位者依次求之雖未至單位如減數適足四倍弧分自乘數而無乘數者卽以前所得數併減之不復遞求如二倍弧則無第三數三倍弧則無第四數

論曰此二術乃求倍分弦矢也倍分弧之分母常

為一其分子卽所倍弧分惟分母為一凡前所定二本術中應用分母乘除者可省去不用乘法中本應置分母自乘乘數求弦則一乘九九乘二十五乘求矢則一乘四乘九乘乘為減數今皆省其乘遲以一九二十五及一四九等為減數一四九等四倍之卽為四十六三十六是其減數增四倍乘法亦增四倍也又求第一數求三率本術皆有分母除亦省去既不用分母故亦不用分子但名弧分乘法中弧分自乘求第一數弧分乘通弦弧分自乘乘矢卽本術分子也其乘除加減均不外乎前所定二本術按之自悉惟求弦皆取奇分此第以整分起度故耳其實半分起度卽可得耦分通弦率宜補之方備求矢乘數增為四倍故遞次求數亦增四倍除是因通弦

術有四除欲同之使歸一例也不知通弦度越分而加爲遞加數兩根相倂其弧分也屬倍數倍矢度按分而加爲遞加數之根其弧分適得本數故弦之弧分爲和一三五爲其較矢之弧分爲半和一二三爲其半較和較各自乘相減得大小兩數相乘四倍用爲乘法不得不增四除半和較各自乘相減適與大小兩數相乘等無所用其四除此葢象數之自然不容强之使同者强同之失其所由來矣且立術尚簡增乘增除徒多繁繞自宜逕置弧分自乘遞減一四九等爲乘法遞次省去四

除爲得也

有通弦求幾分通弧之一通弦（此亦取奇數）

置弧分自乘減一爲第一乘數復置自乘數九乘之減一爲第二乘數復置自乘數二十五乘之減一爲第三乘數依次列之乃置通弦以弧分除之爲第一數次以半徑爲連比例第一率弧分除通弦爲第二率二率自乘一率除之得第三率二率乘之一率除之（二率即第一數應言第一數乘之一率除之始與前一例）得第四率第一乘數乘之四除之又二除之三除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第六率第二乘數乘之

四除之又四除之五除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第八率第三乘數乘之四除之又六除之七除之爲第四數以諸數相併卽所求通弦單位以下棄之未至單位者依次求之

有矢求幾分通弧之一矢此亦奇耦通用

置弧分自乘四倍之減四爲第一乘數復置四倍自乘數四乘之減四爲第二乘數復置四倍自乘數九乘之減四爲第三乘數依次列之乃置矢以弧分自乘除之爲第一數次以半徑爲連比例第一率弧分自乘除矢又二乘之爲第三率以第一數乘之一率

除之得第五率第一乘數乘之四除之又三除之四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第七率第二乘數乘之四除之又五除之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第九率第三乘數乘之四除之又七除之八除之爲第四數以諸數相併即所求矢單位以下棄之未至單位者依次求之

論曰此二術乃求析分弦矢也析分弧之分子常爲一其分母即所析弧分惟分子爲一凡前所定二本術中應用分子乘者可省去不用乘法中本應以分子

自乘減遞次之分母自乘今分子爲一自乘仍得一故可省其乘而遞次各減一又第一數本有分子之乘均可省去既不用分子故亦不用分母但名弧分術中所稱弧分即分母也其乘除加減亦不外乎前所定二本術又求弦宜補偶分求矢乘法無煩四倍除法可省四除

又論曰董氏立此四術以方錐堆釋之方錐堆亦出於三角堆即整分遞加數也故所釋弦矢率祇有倍分倍分中弦率亦祇有奇分至析分弦矢第假倍分之率轉相校勘以定乘除而已顧使不究所由然而但論其術則四術頗多疑義如倍分術

置弧分自乘遞減一九二十五等爲求弦乘法遞減一四九等爲求矢乘法而析分則轉以減數乘弧分自乘而又各減一爲乘法倍分術通弦爲二率倍矢爲三率而析分則必需弧分除通弦弧分自乘除倍矢始得二三率倍分術得數分列左右各併之相減爲弦矢而析分則逕併諸數爲弦矢似其術兩不相通矣由今考之始知求諸數乘除有異者以分子母互爲一省乘省除故也得數後加減有異者以分子母互爲大小乘法有正負故也凡此皆由分子母而定而分子母實由零分遞

加數而生故明乎零分遞加不惟幾分之幾可以任求且可爲析分術推其原兼可爲倍分術補其鈌而四術之互異者亦於是得其通矣

論杜氏九術

通弧求通弦

論曰設有弧析分至極多所析之分必極細此極細一弧通弦幾與弧合以極多分乘之卽原設通弧今以通弧求通弦是以所析極細一分弧通弦而求原設多分弧通弦則一分爲分母多分爲分子乃倍分求弦術也

以通弧爲第一數寄左

論曰第一數本宜置通弦以分子乘之分母除之今極細弧通弦乘分子卽原設通弧分母又爲一不須除故卽以通弧爲第一數

次以半徑爲連比例第一率通弧爲第二率二率自乘一率除之得第三率

論曰求三率本宜以極細弧通弦爲二率自乘之一率除之得三率今用原設通弧代爲二率是二率爲分子乘過數求得三率必爲分子自乘乘過數

次置第一數以三率乘之一率除之得第四率四除之又二除之三除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第六率四除之又四除之五除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第八率四除之又六除之七除之爲第四數應減寄右

論曰遞次乘法本應取分子母各自乘相減數今分子極多自乘後則愈多分母又爲一不煩乘祇須減一九二十五等數是減數甚微可不必減其實弦求弦乘法有減數弧求弦乘法無減數非不

必減本不應減也蓋減數生於分母之一雖分母極細分子極多而終有分在弦究微歉於弧若渾與弧合則必無分可析無子母可名分子即通弧分母并無其一無其一是無減數矣故但以分子自乘爲乘法又遞求各數本宜置前數以三率乘之一率除之得後率本數又以用數乘除法乘除之始爲後數而今所用三率已爲分子自乘乘過數分子自乘者用數乘法也三率者本數乘法也是今之三率實兼有兩種乘法以乘前數業合兩次乘爲一次乘矣故以兩種除法遞除之即得後

數也

第一數第三數相并第二數第四數相并左右相減所餘卽通弦

論曰三率中所藏分子自乘乃負乘法也乘正數爲異名所得者負數乘負數爲同名所得者正數故數常正負相閒正寄左負寄右各併之而左右相減是於正數中減去負數始得通弦也

通弧求矢

論曰矢居通弧之半又以半弧爲本弧而通弧得其倍今以通弧求矢是析通弧至極多分使一分

通弦與弧合極多之總分乘之即通弧因以一分
弧通弦求總分之半弧矢一分爲分母總分之半
爲分子

以半徑爲連比例第一率通弧爲第二率二率自乘
一率除之得第三率

論曰如倍分術宜取一分通弦爲二率今以通弧
代之是二率爲總分乘過數亦即爲倍分子乘過
數求得三率必爲四倍分子自乘乘過數

四除之又二除之爲第一數寄左

論曰如倍分術宜以分子自乘乘倍矢爲第一數

今所得三率卽倍矢惟爲分子自乘乘過數而又多四倍故宜四除又所求乃正矢得數後宜折半先半之故復二除也

次置第一數以三率乘之一率除之得第五率四除之又三除之四除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第七率四除之又五除之六除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第九率四除之又七除之八除之爲第四數應減寄右第一數第三數相并第二數第四數相并左右相減所餘卽矢

論曰遞次求數矢術本無四除今有此除者以所用三率乃四倍分子自乘乘三率數三率爲本數乘法分子自乘爲用數乘法是兼有兩種乘法而又多四倍宜除去之也餘與通弦術同

弧背求正弦

論曰通弦折半爲正弦是正弦乃半通弦也應以通弧爲本弧而弧背得其半今以弧背求正弦是析弧背至極多分使一分通弦與弧合極多之總分乘之卽弧背因以一分弧通弦求總分之倍弧半通弦一分爲分母總分之倍爲分子亦倍分求

弦術也

以弧背爲第一數寄左

論曰如倍分術宜以分子乘一分通弦爲第一數若求正弦宜折半今弧背本卽半分子乘一分通弦故卽爲第一數

次以半徑爲連比例第一率弧背爲第二率二率自乘一率除之得第三率

論曰本宜取一分通弦爲二率以求三率今用弧背代之是二率爲總分乘過數亦卽爲半分子乘過數求得三率必爲分子自乘四之一乘過數

次置第一數以三率乘之一率除之得第四率二除之三除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第六率四除之五除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第八率六除之七除之爲第四數應減寄右第十數第三數相併第二數第四數相并左右相減所餘卽正弦

論曰遞次求數弦術本有四除今無此除者以所用三率爲分子自乘四之一乘過數是兼有兩種乘法而四已除過不煩再除也餘與通弧求通弦

術同

弧背求正矢

論曰正矢與弧背相當弧背卽其本弧今以弧背求正矢是析弧背至極多分使一分通弦與弧合極多之總分乘之卽弧背因以一分弧通弦求總分弧正矢一分爲分母總分爲分子亦倍分求矢術也

以半徑爲連比例第一率弧背爲第二率二率自乘一率除之爲第三率

論曰如倍分術宜取一分通弦爲二率以求三率

今用弧背代之是二率爲總分乘過數亦即爲分子乘過數求得三率必爲分子自乘乘過數二除之爲第一數寄左

論曰本宜以分子自乘乘倍矢爲第一數今所用三率即倍矢已爲分子自乘乘過所求適正矢故須二除

次置第一數以三率乘之一率除之得第五率三除之四除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第七率五除之六除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第

九率七除之八除之爲第四數應減寄右第一數第三數相并第二數第四數相并左右相減所餘卽正矢

論曰遞次求數無四除迺求矢本法以正矢之本弧卽弧背也餘與通弧求矢術同

通弦求通弧

論曰通弧卽通弦之本弧以通弦求通弧是析通弧至極多分使一分通弦與弧合則通弧爲極多之總分取其通弦以求一分弧通弦總分乘之得通弧一分爲分子總分爲分母乃析分求弦術也

以通弦爲第一數

論曰析分術第一數本宜置通弦以分母除之但所求乃通弧得諸數後尙需乘以分母今先於第一數不除以代其乘明諸數皆爲分母乘過數併之卽通弧矣故卽以通弦爲第一數

次以半徑爲連比例第一率通弦爲第二率二率自乘一率除之得第三率

論曰本宜分母除通弦爲二率以求三率今不除是二率爲分母乘過數求得三率必爲分母自乘過數

次置第一數以三率乘之一率除之得第四率四除之又二除之三除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第六率九乘之四除之又四除之五除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第八率二十五乘之四除之又六除之七除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十率四十九乘之四除之又八除之九除之爲第五數

論曰析分術乘法宜置分母自乘一乘減一求第二數九乘減一求第三數二十五乘減一求第四

數今分母自乘已極其多增乘後則愈多所減祇
一可不必減實則析分至渾與弧合并無分子之
一本不應減又今所用三率已爲分母自乘乘過
數但少九乘二十五乘四十九乘等故遞次增此
一乘也

以諸數相并卽通弧

論曰分母自乘爲正乘法乘法正得數皆正故遞

併諸數爲通弧

矢求通弧

論曰半通弧爲矢之本弧今以矢求通弧是析通

弧至極多分使一分通弦與弧合乃以極多總分半之取其弧正矢以求一分弧倍矢爲三率復求二率通弦總分乘之得通弧則一分爲分子總分之半爲分母迺析分求矢術也

以矢八乘之爲第一數

論曰所欲求者通弧而假以求者乃一分倍矢又必爲四倍分母自乘乘過數而後半徑乘之開方卽通弧求一分倍矢本宜以分母自乘除本弧倍矢爲第一數今不除以代乘卽爲分母自乘乘過數而尚少四倍應四乘之又所用乃正矢應二乘

之二四相乘得八故八乘始爲第一數

次以半徑爲連比例第一率八乘矢爲第三率

論曰本宜以分母自乘除倍矢爲三率若不除而

但倍其矢則三率中藏分母自乘已兼有兩種乘

法遞次求數可無四除今因術中通弧與弦矢相

求槪有四除故三率先增四倍也

次置第一數以三率乘之一率除之得第五率四除

之又三除之四除之爲第二數次置第二數以三率

乘之一率除之得第七率四乘之四除之又五除之

六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除

之得第九率九乘之四除之又七除之八除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十一率十六乘之四除之又九除之十除之爲第五數

論曰如前論乘法不應減一逕用分母自乘今所用三率已兼有之但少四乘九乘十六乘等故遞次增乘也

以諸數相併又爲連比例第三率與第一率半徑相乘開平方得第二率即通弧

論曰第一數爲四倍分母自乘乘過數遞得諸數莫不皆然併之即爲一分倍矢乘分母自乘之四

倍半徑乘之得一分通弦自乘乘分母自乘之四倍開方得一分通弦乘分母之二倍卽通弧也

正弦求弧背

論曰倍弧背爲通弦本弧亦卽爲正弦本弧今以正弦求弧背是析弧背至極多分使一分通弦與弧合適以極多之總分倍之取其弧通弦求一分弧通弦極多分乘之得弧背則一分爲分子總分之倍爲分母亦析分求弦術也

以正弦爲第一數

論曰如析分第一數本宜分母除通弦而半分母

除正弦得數亦同今不除卽以正弦爲第一數是爲半分母乘過數

次以半徑爲連比例第一率正弦爲第二率二率自乘一率除之得第三率

論曰第二率本宜分母除通弦亦可以半分母除正弦今卽用正弦是二率爲分母之半乘過數求得三率必爲分母自乘四之一乘過數

次置第一數以三率乘之一率除之得第四率二除之三除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第六率九乘之四除之五除之爲第三數次

置第三數以三率乘之一率除之得第八率二十五乘之六除之七除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十率四十九乘之八除之九除之爲第五數以諸率相并卽弧背

論曰所用三率既爲分母自乘四之一乘過數是兼有兩種乘法而少四倍故乘後不煩四除也餘均與通弦求通弧術同

正矢求弧背

論曰弧背既矢之本弧以正矢求弧背是析弧背至極多分使一分通弦與弧合則弧背爲極多之

總分取其正矢以求一分弧倍矢一率乘之開方
得一分弧通弦總分乘之得弧背一分爲分子總
分爲分母亦析分求矢術也
以正矢倍之爲第一數
論曰第一數本宜分母自乘除倍矢今不除而但
倍其矢是爲分母自乘乘過數
次以半徑爲連比例第一率倍正矢爲第三率
論曰三率與第一數等亦爲分母自乘乘過數
次置第一數以三率乘之一率除之得第五率三除
之四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率

除之得第七率四乘之五除之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第九率九乘之七除之八除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十一率十六乘之九除之十除之爲第五數

論曰遞次求數無四除迺求矢本法以弧背爲矢本弧故也餘與矢求通弧術同

以諸數相并又爲連比例第三率與一率半徑相乘開平方得第二率卽弧背

論曰并諸數得一分倍矢乘分母自乘數半徑乘

之得一分通弦自乘乘分母自乘數開方得一分通弦乘分母數即弧背也

圜徑求周

論曰六十度通弦即半徑其通弧爲圜周六之一今以圜徑求則是半其徑爲六十度通弦求得通弧六乘之而得周也即通弦求通弧術亦即析分求弦術

以徑三乘之爲第一數

論曰如通弦求通弧爲第一數即用半徑但今所知爲全徑應以二除所求爲全周應先六乘二除

六乘與三乘等故三乘徑爲第一數
次置第一數四除之又二除之三除之爲第二數次置第二數九乘之四除之又四除之五除之爲第三數次置第三數二十五乘之四除之又六除之七除之爲第四數次置第四數四十九乘之四除之又八除之九除之爲第五數次置第五數八十一乘之四除之又十除之十一除之爲第六數

論曰通弦旣卽半徑則諸率齊同連比例本數之乘除遞次可以省去卽用數乘法中分母自乘亦隨省去故僅以增乘之一九二十五等爲乘法而

以用數除法除之也

若以千萬爲圜徑則求至第十一數并之得三千一百四十一萬五千九百二十六卽圜周

論曰第一數巳乘爲六倍卽遞得之諸數皆然并之必得六十度通弧之六倍卽圜周也得數遞次漸降今約圜徑千萬爲例計共八位求至第十一數巳抵單位不煩再求若增求之位愈多數亦愈密

總論曰弧與弦矢不相通通之以極細分極細分通弦卽弧倍矢卽弧爲二率之三率但本弧與極

細弧其弦矢可互求卽弧與弦矢亦可互求此董氏借分析分四術實爲此九術之原今更以分子母覈之而其理益顯蓋弦矢方邊也弧圜線也方有盡圜無盡分之設也可有盡而亦可無盡假其有盡者察數之變而還其無盡者得理之通弧與弦矢乃無可復遁此割圜之能事至九術而極而非有分子母亦無以啟其秘而發其扃也

仁和高雲麟
新陽趙元益同校

